数理解析研究所講究録
263巻 1976年 2-8

TANGRAM について

京大・数理研　一松 信

1. TANGRAM

TANGRAM とは，正方形の紙片を図のように切った7片（大きい直角二等辺三角形2，中位の直角二等辺三角形1，小さい直角二等辺三角形2，正方形1，平行四辺形1）の"Tan"とよばれる片を並べて図形を作るパズルである．この語源には数説あるが，Sam Loydが彼の「Tanの第八之書」でのべた伝説（4000年以上前の中国人の発明）は，今日では彼の創作であることがわかっており，古代英語のTrangam（がらくた物の意味）の書き誤り説もでている([1])．

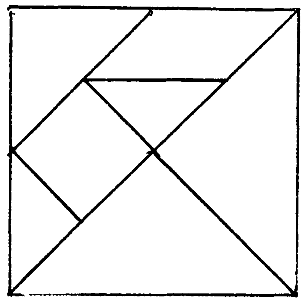

図 0. TAN

Tangram はジグソーパズルと違って，片の数がごく少なく，しかも規則的な形をしているために，人間にはかえって難しいが，計算機にはやらせやすい．じっさい与えられた図形をTanの組合せで求めるプログラムも開発されている([2])．

人間にとっておもしろいのは，Tanによっていろいろなシルエットを作りだすことであろうが，これは計算機には困難

であろう. それはこの図形が何に見えるか, どうしておもしろく（あるいは美しく）感ずるのか, といった, 単なるパタン認識以上の審美的ないし価値の判断が必要だからである.

むしろ計算機によるパズルとして興味深いのは, 組合せ問題で, 以下「第1種の問題」の研究課題として紹介する.

2. TANGRAMの組合せ問題(1) 凸多角形

Tangramとして作られる(=Tanの組合せでできる)凸多角形が13種であることが確認されたのは1940年代である[3].
内角は45°の倍数, 45°, 90°, 135°だから, 8角形より上はできない. 面積と辺の関係をしらべると7角形, 8角形は不可能で, 図1の13種の外形しかできないことがたしかめられる. (内部の並べ方には自由度がある) 図1ではとくに唯一の非対称形である平行四辺形状のTANを一定の向きに保って構成したが, 全部それを裏返した向きでも可能である.(それはすべてについて, それが三角形の片と左右対称図形を作るか, または小三角形との合成が, 正方形と小三角形の合成と合同の台形を作り, おきかえ可能になっていることからわかる). なおこの図では正方形の1辺を1, 全面積を8とし, 整数長の辺は水平, 垂直に, $\sqrt{2}$の整数倍長の辺は45°の方向に記したが, これが標準的な記述である.

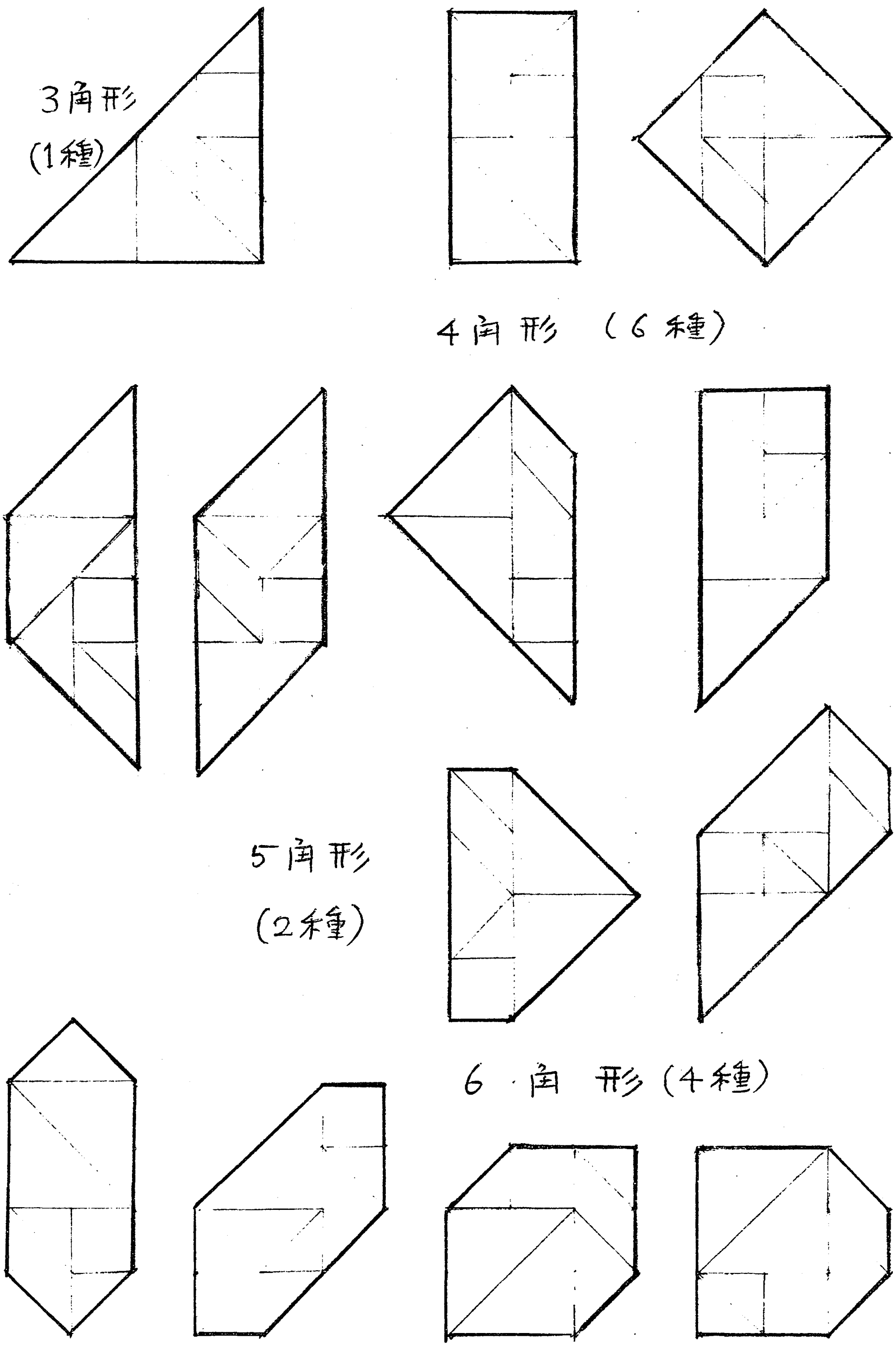

図1　凸多角形TANGRAM（全13種）

3. ピンハネ・パラドックス

紙を切って並べかえ，64＝65（または64＝63）というパラドックスがある．僅かな重なりやすき間が一見してわからないことから生ずる．Sam Loydeは，この種のパラドックスの手のこんだものとして，重ね方をかえると人数が変化して見える「消える妖精」「ライオンと狩人」など傑作を考案した．特定の1人が消えるのでなく，何人かが全体として少しずつすずまりになり，それがたまって1人分の差が生ずるいわば「ピンハネ」の応用によるパラドックスである．

Loydeは Tangramでもこの種のパラドックスを3例考えている．どちらも同じような形で，一方は1個所穴があるように見えるが，どちらもTan 7片全部で作られている対である．穴の分だけ他が少しずつ大きくなっているのだが，見ただけでは区別できないせいである．

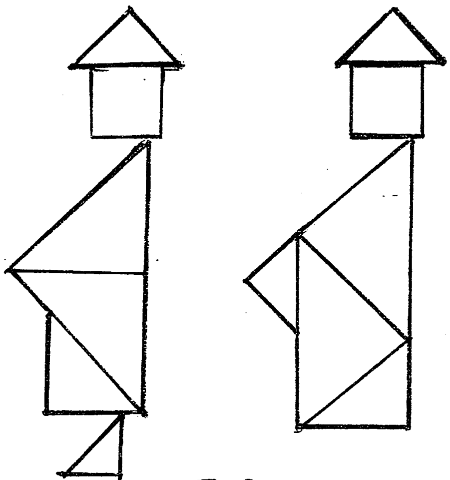
図2

しかしこの種の傑作は，Deudonyによる「2人のマンダリン」(図2)だろう．りんかくだけだと，足の有無の差としか思われない．(斜の線の長さが$2\sqrt{2}:3$，高さが$4:3\sqrt{2}$で，5%以上も違うのに!)

4 TANGRAMの組合せ問題(2) 5角形

TANGRAMとして作られる3角形は1種, 4角形は6種(すべて凸)である. 一方6角形以上で制限をつけなければ無限(連続体の濃度)にできる. 直角二等辺三角形を2組作って, これをずらせればよい. その意味で5角形の可能な個数は興味深い問題である.

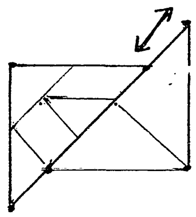

図3

この場合快(snug)なものと, そうでないものとを区別したほうがよい. 快TANGRAMとは, 各TANを構成する小直角二等辺三角形がすべて辺同志・頂点同志ぴったり合わさり辺の途中に別の片の頂点がきたりしないものである. (図1はすべて快)

Readはかつてこの数え上げをやり, snugな5角形が16種, non-snugな5角形が2種と発表したが([4]), これには多数の見落しがあった. 前者では, りんかくを定めると, 面積の関係から寸法がきまるが, そのうちTANGRAMとしてできないとして捨てたもののうちに, じつは組立てられるものがあり, 計22種のようである. このほうは根気よくしらべてゆくことでたしかめられそうである. Non-snugなものについては, Readは「全体が2つの3角形からなる」としたが, これは早合点で, 4角形と3角形の組合せも可能であった. したがってこれを完全に求めるためには, TANを2組に分

け，一方で3角形，他方で4角形を作り，その上でそれを合成して（一頂点が平角になって）全体が5角形になるようにできる場合をさがすことになる．これは手でも計算機でも，ちょっとした仕事であろう．現在のところ（3角形十3角形のときもこめて）計31種らしいといわれているが，それ以外にないことは確認されていない．これは興味ある未解決の問題である．

5. TANGRAMの組合せ問題(3) その他

(i) 凸TANGRAMとして可能なものの総数はいくつか？

もちろん有限個で最大18角形である（凸というとき，全体が連結，かつ単一連結という制限をも加える）．しかしそれは相当に大きな数で，計算機で求めることも容易ではなさそうである．Readは大きい3角形2個を除いた5個の"ミニ・タングラム"について；　ミニコンで30分ほどの計算で，951個と求めている．

(ii) 農場の問題（Farm Problem）　TANでかこんで作ることのできる周囲に接しない最大の穴の面積（厳密にいえば，その上限）はいくつか？　また単一連結で周囲に接しない穴は最大何辺か（13らしい）？　これらは上記とは別の未解決の問題である．

参考文献

[1] R.C. Read, TANGRAM: 330 Puzzles, Dover Publisher, 1965

[2] E.S. Deutsch - K.C. Hayes, Jr., A Heuristic Solution to Tangram Puzzle. Machine Intelligence, vol. 7 (1972), 205—240.

[3] F.T. Wang - C.C. Hsiung, A Theorem on Tangram, The Amer. Math. Monthly 49 (1942), 596-9.

[4] M. Gardner, Mathematical Games; TANGRAM; Scientific American 1974 Aug., Sept., (日本語訳：サイエンス，同10月号，11月号).